



УДК 550.34+551.24

А. И. Герус<sup>1</sup>, А. В. Викулин<sup>1</sup>

<sup>1</sup> *Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН,  
г. Петропавловск-Камчатский  
e-mail: gerus@kscnet.ru*

<sup>2</sup> *Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга,  
г. Петропавловск-Камчатский*

## Ротационная модель блоковой геосреды: математические аспекты и численные результаты

В работе рассмотрено два подхода к моделированию ротационных движений земной коры: в геофизическом приближении (до сотен-тысяч лет), когда земная кора предполагается твёрдой и блоковой, и в геологическом приближении (миллион лет и более), когда земную кору можно считать текучей средой. Приведены соответствующие математические модели, численные результаты и их интерпретация.

**1.** В геофизическом приближении на небольших временах рассмотрения процесса (до сотен-тысяч лет) земную кору можно считать эффективно «твёрдой», состоящей из большой совокупности структурных элементов — блоков. Разработаны модели геофизических процессов, протекающих в блоковых средах (работы А. В. Пейве, М. А. Садовского и др.).

Ротационная модель с собственным моментом блока для сейсмического процесса в пределах окраины Тихого океана построена А. В. Викулиным и А. Г. Иванчиным [4]. Она опирается на представления, согласно которым движение блока вдоль поверхности вращающейся Земли механически эквивалентно его движению в не вращающейся (инерциальной) системе координат под действием собственного момента (спина). Такое движение блока создаёт в окружающей его земной коре напряжения с моментом силы, сопровождается формированием волн поворотных деформаций и позволяет объяснить многие закономерности геодинамического процесса, включая особенности волновых движений геосреды, её нелинейные, реидные и «вихревые» свойства [1]. Уравнение движения сейсмофокального блока в цепочке представляет собой известное уравнение синус-Гордона (СГ) [1, 4], которое в рамках ротационной модели является следствием закона сохранения момента блока при его движении:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta, \quad (1)$$

где  $\theta = \beta/2$ ,  $\xi = k_0 z$  и  $\eta = v_0 k_0 t$  — безразмерные координаты,  $z$  — расстояние вдоль цепочки блоков,  $t$  — время,  $\beta$  — функция угла поворота,  $v_0$  — характерная скорость процесса,  $k_0$  — волновое число.

Уравнение СГ имеет множество аналитических решений, одним из которых является функция следующего вида:

$$\theta = 4 \arctg \left[ \exp \left( \frac{X - u\eta}{\sqrt{1 - u^2}} \right) \right], \quad (2)$$

$$X = \xi - \xi_0, u = \frac{U}{c_0}, c_0^2 = \frac{3\sqrt{15}}{8\pi^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \Omega R_0$$

где  $U$  — скорость распространения уединенной волны деформации (поворота). Такое решение называется солитонным и представляет собой уединенную волну.

**1.1** В модели движения среды, описываемой уравнением СГ (1), блоки равномерно поворачиваются друг относительно друга, и скорость распространения волны вдоль цепочки постоянна во времени. Для более точного описания реального сейсмического процесса необходимо дополнить ротационную модель эффектами отклонения моментов сил блоков от равновесных положений  $\mu$  и трения на границах  $\alpha$ . В результате закон движения блока в цепочке можно получить в виде модифицированного уравнения СГ [2]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \mu \delta(\xi) \sin \theta \quad (3)$$

где  $\delta(\xi)$  — Функция Дирака. Уравнение (3) решалось численно методом МакЛафлина-Скотта, суть которого заключается в том, что при использовании функции Грина решение возмущённого уравнения СГ структурно совпадает с (2), но координата  $X$  и скорость  $u$  зависят от времени и связаны соотношением:

$$X = \int_0^t u(t') dt' + x_0(t), \quad \frac{dX}{dt} = u(t) + \frac{dx_0}{dt}$$

Подстановка этого соотношения и (2) в (3) даёт систему уравнений:

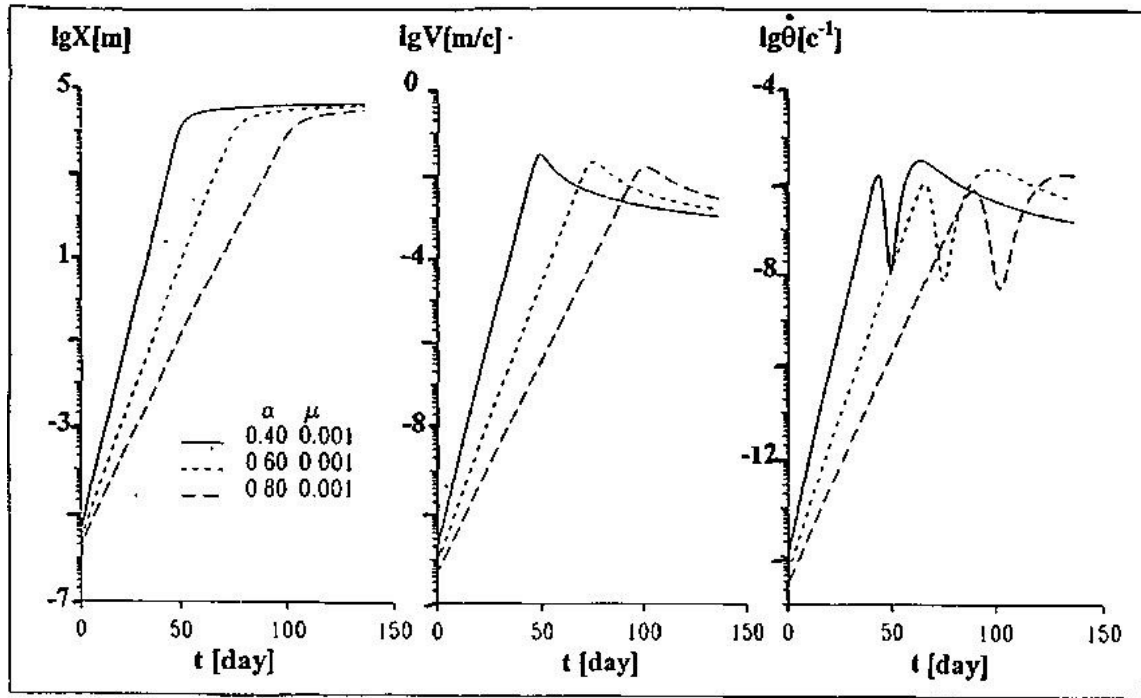


Рис. 1. Решения уравнения (3) для расстояния  $X$ , пройденного волной, величины её скорости  $V = dX/dt$  и величины угловой скорости поворота блока (скорости деформации)  $\dot{\theta} = d\theta/dt$  при значениях параметров  $\alpha \approx 0,4 - 0,8$  и  $\mu \approx 10^{-3}$ .

$$\frac{du}{d\eta} = -\alpha u(1 - u^2) + \frac{\mu}{2}(1 - u^2) \operatorname{sech}^2\left(\frac{X}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{X}{\sqrt{1 - u^2}}\right)$$

$$\frac{dX}{d\eta} = u - \frac{\mu}{2}uX \operatorname{sech}^2\left(\frac{X}{\sqrt{1 - u^2}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{X}{\sqrt{1 - u^2}}\right)$$

Безразмерные координаты  $X$  и скорости  $u$  рассчитывались с помощью последних соотношений методом Рунге-Кутты, а затем подставлялись в (2).

Начальные условия  $x_0 = 0, t_0 = 0, u_0 = 10^{-10}$  ( $u = U/c_0$  — безразмерная скорость) выбирались таким образом, чтобы скорость деформирования не превышала значения  $\dot{\theta}_0 \leq 10^{-13} \text{ с}^{-1}$ , что близко к средней скорости деформации в сейсмоактивных [9] и вулканических [7] областях и заметно отличается от глобальной средней скорости деформации (вращения отдельных блоков) в различных регионах Земли, оцениваемой величиной  $5,5 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1} \approx 1-2 \text{ град/млн лет}$  [10]. Следует отметить, что значение скорости  $10-13 \text{ с}^{-1}$  по порядку величины близко теоретической модельной оценке величины угла  $\beta_0 \approx 10^{-2} \text{ град.}$ , на который в рамках ротационной модели поворачивается «элементарный» сейсмофокальный блок между двумя последовательными во времени сильнейшими землетрясениями с очагами в его пределах.

При этом скорость распространения локализованной волны уже не является величиной постоянной, так как кроме угловой скорости вращения тела  $\Omega$  зависит также и от параметров  $\alpha$  и  $\mu$ .

На рис. 1 в качестве примера приведено характерное численное решение возмущенного уравнения СГ.

Видим, что зависимости  $V(t)$  имеют точки, в которых скорость волны достигает своего максимального значения, после чего плавно выходит на асимптоту. Анализ показал, что для режима замедленного сейсмического процесса, при котором взаимодействие блоков (очагов землетрясений) между собой осуществляется в основном за счёт медленных движений — крипа, асимптотическое значение скорости передачи ротационных деформаций составляет  $c_0 \approx 1 - 10 \text{ см/с}$  [2].

Интервалы времени, в течение которых форшоки и афтершоки происходят относительно сильнейших толчков, соотносятся в пропорции  $\Delta t_a/\Delta t_\phi = 69/11 = 6,3$  [3], близкой к отношению продолжительностей максимумов скорости деформации  $\dot{\theta}$   $\Delta t_{\theta_{max2}}/\Delta t_{\theta_{max1}} = 6 \pm 2$ . В то же время, при близости значений магнитуд наиболее сильных форшоков и афтершоков:  $M_\phi \approx M_a$ , их числа  $N_a$  и  $N_\phi$ , а, следовательно, и суммарные сейсмические энергии  $E_a$  и  $E_\phi$ , выделяемые в течение форшоковой и афтершоковой стадий, соотносятся между собою в пропорции  $N_a/N_\phi = E_a/E_\phi = 2,3$ , близкой к отношению величин максимумов скоростей деформации  $\dot{\theta}_{max2}/\dot{\theta}_{max1} = 2 - 2,5$ .

Интерпретация графика скорости деформации  $\dot{\theta}$  может быть следующей. Особенностью взаимодействия сейсмофокальных блоков, по сути, является перераспределение и высвобождение накопленных напряжений при землетрясении, которое происхо-

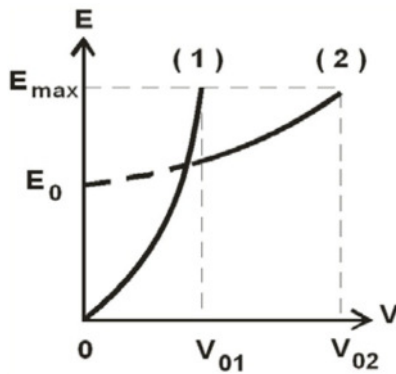


Рис. 2. Волновые решения  $E(V)$  СГ-уравнения [6]: 1 — солитоны; 2 — экситоны, — характерные скорости процесса, соответствующие «предельным» энергиям.

дит в результате локализации неустойчивой деформации в определённый момент времени (минимум на графике  $\dot{\theta}$ ). В рамках такого подхода, первой и второй стадиям взаимодействия тектонической волны с сейсмофокальным блоком (первый и второй максимумы на кривой  $\dot{\theta}$ ) могут соответствовать форшоковая и афтершоковая стадии сейсмического цикла.

Таким образом, ротационная модель позволяет количественно описать такие важные свойства сейсмического процесса, как его форшоковую и афтершоковую стадии и заключенную между ними «особенность» — сильнейшее землетрясение.

Уравнение синус-Гордона имеет много решений. Моделируя движения в длинных молекулярных цепях, А. С. Давыдов показал [6], что волновые движения в таких цепях описываются двумя типами возбуждений: солитонами и экситонами (в смысле [6]) (рис. 2). Характерными для таких решений являются «предельные» скорости, соответствующие максимальным энергиям возбуждения  $E_{max}$ :  $V_{01}$  и  $V_{02}$ .

Справедливы следующие соотношения:  $0 \leq E \leq E_{max}$ ,  $0 \leq V \leq V_{01}$  для солитонного решения и  $0 \leq E_0 \leq E \leq E_{max}$ ,  $v_{01} \leq V \leq V_{02}$  для экситонного.  $E_{max}$  — максимальное значение энергии, соответствующее наибольшим значениям магнитуд землетрясений;  $E_0$  — значение энергии, соответствующее коллективному возбуждению всей совокупности молекул в цепочке (т. е. очагов землетрясений в сейсмическом поясе в геосреде), как целой, остающейся неподвижной, со скоростью  $V = 0$ .

По данным о скорости миграции очагов тихоокеанских землетрясений с глубинами гипоцентров менее 100 км, опубликованным в [1], глобальная (вдоль окраины Тихого океана) и локальная (в очагах индивидуальных землетрясений) миграционные зависимости, предельные значения скоростей и соответствующие им наибольшие магнитуды составляют (рис. 3):

$$\begin{aligned} M_1 &\approx 2 \lg V_1, \\ V_{1,max} &\approx 1 - 10 \text{ см/с}, \quad M_{1,max} \approx 8,5 - 9 \end{aligned} \quad (4)$$

$$\begin{aligned} M_2 &\approx 2 \lg V_2, \\ V_{2,max} &\approx 4 - 8 \text{ км/с}, \quad M_{2,max} = 8,3 \end{aligned} \quad (5)$$

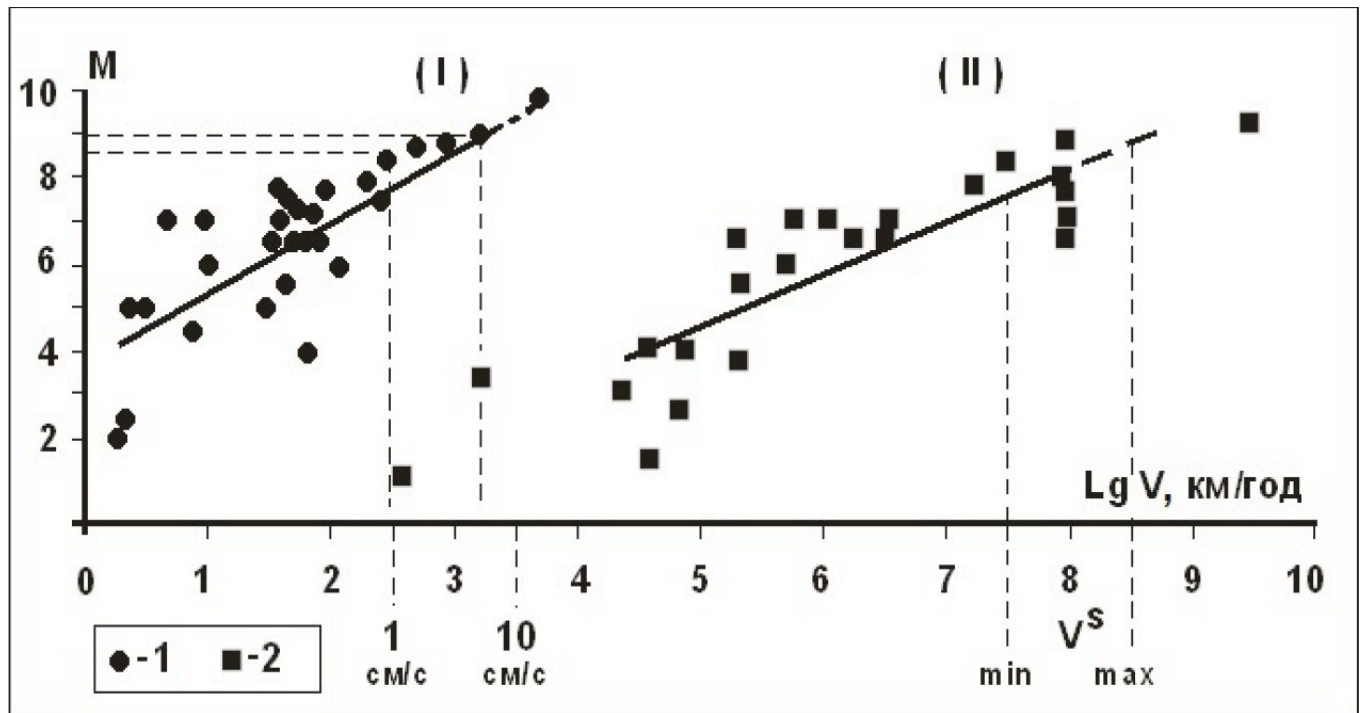
Показано [4], что теоретические модельные для молекулярных цепей и экспериментальные миграционные для цепочек очагов землетрясений зависимости качественно совпадают между собой. Это позволяет интерпретировать экспериментальные миграционные зависимости (4) и (5) как солитонное и экситонное решения СГ уравнения, имеющие характерные предельные скорости  $V_{01} = V_{1,max}$  и  $V_{02} = V_{2,max}$ . При этом предельное значение скорости миграции  $V_{1,max} \approx 1 - 10$  см/с совпадает с характерной скоростью  $c_0$ , полученной в рамках ротационной блоковой модели геосреды, что даёт возможность интерпретировать последнюю как предельную скорость солитонного решения уравнения синус-Гордона  $V_0$ .

Известно, что солитонные решения СГ-уравнения характеризуются рядом важных свойств, соответствующих свойствам реальных элементарных частиц [Гапонов-Грехов и др., 1979], в то время как экситоны являются такими возмущениями, которые в линейном приближении вырождаются в обычные волны [6], в нашем случае — в продольные (P) и поперечные (S) сейсмические (s) волны  $V^s$ . Поэтому выявленные в рамках ротационной модели солитонное  $V_{01}$  (4) и экситонное  $V_{02}$  (5) решения с характерными предельными скоростями:

$$V_{1,max} \approx V_{01} \approx c_0, \quad V_{2,max} \approx V_{02} \approx V^s, \quad (6)$$

по сути, являются новым типом упругих волн в твёрдых телах — ротационными волнами [1, 4], которые представляют собой уединенные волны, поляризованные перпендикулярно к направлению распространения [2].

В работе [4] показано, что в рамках ротационной модели взаимодействие между блоками имеет своеобразный корпускулярно-волновой характер и осуществляется двумя способами. Во-первых, близкодействием — путём обмена моментами рядом расположенных блоков, а не за счёт (как в моментной теории упругости) трения вдоль их границ, которое в рамках ротационной модели препятствует взаимодействию блоков. В качестве примеров такого взаимодействия можно привести сильнейшие землетрясения-дуплеты (и мультиплеты) с близкорасположенными очагами, при которых кроме сильных сотрясений на обширных участках поверхности Земли всегда возбуждаются интенсивные собственные колебания планеты. Во-вторых, далекодействием — путём обмена энергиями между блоками на больших (много больше размера блока) расстояниях. Примеры такого взаимодействия в сейсмологии также широко известны — это «миграция» очагов землетрясений вдоль сейсмических поясов на многие десятки тысяч километров, удаленные форшоки и афтершоки и пары землетрясений.



**Рис. 3.** Значения скоростей глобальной (1 — вдоль всей окраины) и локальной (2 — в пределах индивидуальных очагов сильных землетрясений) миграций тихоокеанских землетрясений как функции их магнитуды  $M$  [1]: (I), (II) — глобальная и локальная зависимости  $M(\lg V)$  соответственно, определённые методом средних квадратов;  $V^s$  — скорость сейсмических волн.

**1.2** В процессе исследования миграции сейсмической и вулканической активности в пределах трёх наиболее геодинамически активных поясов планеты (окраина Тихого океана, Альпийско-Гималайский пояс и Срединно-Атлантический хребет) был выявлен параметр  $p$ , чувствительный к геодинамическим обстановкам в регионах:  $p_+ > 0$  для областей сжатия и  $p_- < 0$  для областей растяжения [11]. Оказалось, что  $p_+ + p_- \rightarrow 0$ , что наделяет параметр  $p$  свойствами, близкими свойствам сохраняющейся векторной величины. В рамках ротационного моделирования геодинамического процесса, протекающего в блоковой среде, сохраняющемуся векторному параметру  $p$  может быть придан смысл момента. Тогда исходное уравнение (1) может быть переписано в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \text{sign}(p) \sin \theta \quad (7)$$

Полученное уравнение (7) является дальнейшим развитием ротационной модели движения блоковой геосреды, отвечающим закону сохранения момента и позволяющим описывать закономерности сейсмической и вулканической активности во всём их многообразии.

**2.** В течение геологических отрезков времени (миллион лет и более) «твёрдая» Земля с достаточно хорошим приближением может рассматриваться как текучая среда, по свойствам близкая к жидкости. Тогда в «геологическом» приближении, когда геосреда имеет реидные (невязкие) свойства, можно

наметить другой путь аналитического изучения закономерностей её движения. А именно: в рамках известной задачи Дирихле (1860) о вращающемся объёме гравитирующей невязкой жидкости, сохраняющей свою эллиптическую форму. В классическом виде эта задача сформулирована следующим образом [1]: «Дана однородная несжимаемая масса гравитирующей жидкости. Допускают ли законы гидродинамики такое движение этой массы, чтобы её форма в любой момент оставалась эллипсоидальной, а поле скоростей жидкости — линейным по координатам?»

Геологическим проявлением таких движений могут являться, например, вихревые структуры земной коры, впервые описанные в 1928 г. Ли Сыгуаном. Важные результаты, доказывающие существование во вращающихся реальных системах, включая планеты и звезды, внутренних движений «вихревой» природы, были получены Б. Риманом (1866), Чандрасекхаром (1983), Б. П. Кондратьевым (2003) и др. [1]

В качестве примера на рис. 4 приведён результат одного из инструментальных геодезических наблюдений из работы геофизика Т. Рикитакэ [8], на котором отчётливо видна «вихревая» структура векторов смещения триангуляционных пунктов.

Проблема вихревых геологических структур в работах геологического профиля только затрагивается; полностью отсутствуют работы, в которых было бы приведено достаточно полное описание всего спектра наблюдаемых на поверхности Земли



**Рис. 4.** Векторное изображение смещений триангуляционных пунктов I класса полученных в результате двух периодов наблюдений в конце XIX — начале XX вв. и в середине XX в., отстоящих друг от друга приблизительно на 60 лет [8].

вихревых структур с указанием их пространственных и временных параметров. Никем до сих пор не создан каталог вихревых структур, пригодный для анализа, например, статистического. В геофизических же работах проблема вихревых структур, вообще говоря, практически не обсуждается.

Мы полагаем, что вихревые геологические структуры могут являться решениями проблемы Дирихле-Римана, которые на поверхности земной коры могут проявляться в виде течений вихревой формы.

Это направление исследований может рассматриваться совместно с представлениями нелинейной физической акустики, в которой трансляционные движения среды могут являться следствием её нелинейных свойств в результате радиационного давления.

Таким образом, моделирование геодинамических движений, протекающих в блоковой геологической среде, может быть сведено к решению задач 1–2, аналитическое содержание которых выше пред-

ставлено уравнениями синус-Гордона (1), (3), (7) и задачей Дирихле-Римана.

#### Список литературы

1. Викулин А. В. Сейсмичность. Вулканизм. Геодинамика: сб. тр. Петропавловск-Камчатский: КамГУ, 2011. 407 с.
2. Викулин А. В., Быков В. Г., Лунева М. Н. Нелинейные волны деформации в ротационной модели сейсмического процесса // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5. № 1. С. 31–39.
3. Викулин А. В., Викулина С. А., Митякин В. П. Сценарий возможного сейсмического воздействия на Петропавловск-Камчатский в результате катастрофического землетрясения. М.: ИЛ АН СССР. 1991. 55 с.
4. Викулин А. В., Иванчин А. Г. О современной концепции блочно-иерархического строения геосреды и некоторых её следствиях в области наук о Земле // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых (ФТПРПИ). 2013. № 3. С. 67–84.

5. Гапонов-Грехов А. В., Рабинович М. И., Л. И. Мандельштам и современная теория нелинейных колебаний и волн // Успехи физ. наук. 1979. Т. 128. Вып. 4.
6. Давыдов А. С. Солитоны в квазиодномерных молекулярных структурах // Успехи физ. наук. 1982. Т. 138. Вып. 4. С. 579–624.
7. Мелекесцев И. В. Вихревая вулканическая гипотеза и некоторые перспективы её применения // Проблемы глубинного вулканизма. М.: Наука. 1979. С.125–155.
8. Рикитаке Т. Геофизические и геологические данные о Японской островной дуге и её обрамлении // Окраины континентов и островные дуги. М.: Мир. 1970. С.216–236.
9. Родионов В. Н., Сизов И. А., Цветков В. М. Основы геомеханики. М.: Недра. 1986. 301 с.
10. England P., Molnar P. The field of crustal velocity in Asia calculated from Quaternary rates of slip on faults // Geophys. J. Int.. 1997. 130. N 3. P.551–582.
11. Vikulin A. V., Akmanova D. R., Vikulina S. A., Dolgaya A. A. Migration of seismic and volcanic activity as display of wave geodynamic process // Geodynamics & Tectonophysics. 2012. V. 3. № 1. P. 1–18. DOI:10,5800/GT-2012-3-1-0058