

УДК 550.34+551.24

ЧИСЛЕННОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ ПАРАМЕТРОВ СОЛИТОННОГО
РЕШЕНИЯ ВОЗМУЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ СИНУС-ГОРДОНА
В РАМКАХ РОТАЦИОННОЙ МОДЕЛИ

А.И. Герус^{1,2}, А.В. Викулин¹

¹Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН, г. Петропавловск-
Камчатский; e-mail: gerus@kscnet.ru

²Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга,
г. Петропавловск-Камчатский

В работе приведены результаты численных расчетов параметров решения модифицированного уравнения синус-Гордона с целью моделирования процессов в очаге землетрясения в рамках ротационной модели.

В рамках блоковой ротационной модели движение цепочки блоков геосреды, моделирующей сейсмический процесс в пределах окраины Тихого океана, математически представлено уравнением синус-Гордона [1, 4]:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta, \quad (1)$$

где $\theta = \beta/2$, $\xi = k_0 z$ и $\eta = c_0 k_0 t$ – безразмерные координаты, z – расстояние вдоль цепочки блоков, t – время, β – функция угла поворота, c_0 – характерная скорость процесса, k_0 – волновое число. Это уравнение относится к классу нелинейных уравнений в частных производных, и, вообще говоря, подходит для описания большого числа нелинейных явлений, связанных с распространением уединенных волн. Кроме того, уравнение синус-Гордона, как и некоторые другие нелинейные уравнения, допускает решения в виде солитонов – уединенных волн, подобно частицам сохраняющих свою структуру после столкновения с другими такими возмущениями [6].

Уравнение СГ имеет аналитические решения, одним из которых является функция следующего вида:

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{\xi - u\eta - \xi_0}{\sqrt{1-u^2}} \right) \right], \quad (2)$$

$$u = \frac{U}{c_0}, \quad c_0^2 = \frac{3\sqrt{15}}{8\pi^2} \sqrt{\frac{G}{\rho}} \Omega R_0,$$

где U – скорость распространения уединенной волны деформации (поворота). Такое решение называется *солитонным* и представляет собой уединенную волну.

В модели движения среды, описываемой уравнением СГ (1), блоки являются равновеликими и равномерно поворачивающимися друг относительно друга. Скорость распростране-

ния волны вдоль такой цепочки постоянна во времени. Для более точного описания реального сейсмического процесса уравнение (1) должно быть дополнено другими слагаемыми.

Д. Маклафлином и Э. Скоттом в свое время было подробно исследовано влияние произвольного структурного возмущения на поведение односолитонного решения уравнения СГ. В работе [11] авторы рассматривали динамику отдельного солитона в джозефсоновской линии передачи, которая описывалась возмущенным уравнением СГ (в авторских обозначениях):

$$\phi_{tt} = \phi_{xx} - \sin \phi + \epsilon f, \quad 0 \leq \epsilon \ll 1, \quad (3)$$

где ϵf – структурное возмущение, которое имеет вид

$$\epsilon f = -\alpha \phi_t + \beta \phi_{xxt} - \gamma - \sum_i \mu_i \delta(x - a_i) \sin \phi. \quad (4)$$

Здесь слагаемое $\alpha \phi_t$ описывает диссипацию вследствие туннелирования нормальных электронов, слагаемое $\beta \phi_{xxt}$ – диссипацию, обусловленную движением нормальных электронов вдоль барьера, слагаемое γ – распределенный ток смещения; слагаемые $\mu_i \delta(x - a_i) \sin \phi$ описывают локальные области сильного тока Джозефсона (микроскопические закоротки, локальные утоньшения барьера и т.д.) [11].

Пользуясь вышесказанным, сформируем теперь аналогичное структурное возмущение для уравнения (1), в соответствии с нашей предметной областью. А именно, дополним нашу модель (1) эффектами отклонения моментов сил блоков от равновесных положений μ и трения на границах α . Тогда структурное возмущение будет выглядеть следующим образом:

$$\epsilon f = -\alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} - \mu \delta(\xi) \sin \theta, \quad (5)$$

и возмущенное уравнение СГ запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \theta}{\partial \xi^2} - \frac{\partial^2 \theta}{\partial \eta^2} = \sin \theta + \alpha \frac{\partial \theta}{\partial \eta} + \mu \delta(\xi) \sin \theta, \quad (6)$$

где $\delta(\xi)$ – Функция Дирака.

Уравнение (6) не имеет аналитических решений, так как в формуле одиночного солитона (2) скорость u и фаза ξ_0 в присутствии структурного возмущения (5) приобретают зависимость от времени:

$$X = \int_0^t u(t') dt' + \xi_0(t), \quad \frac{dX}{dt} = u(t) + \frac{d\xi_0(t)}{dt}, \quad (7)$$

$$\theta = 4 \operatorname{arctg} \left[\exp \left(\frac{\xi - X(t)}{\sqrt{1 - u(t)^2}} \right) \right]. \quad (8)$$

Маклафлин и Скотт свели уравнение (3) к системе из двух обыкновенных дифференциальных уравнений, используя функцию Грина [11]. В нашем случае, по аналогии, в результате подстановки (7)-(8) в (6) можно получить следующую систему уравнений:

$$\frac{du}{d\eta} = -\alpha u(1-u^2) + \frac{\mu}{2}(1-u^2) \operatorname{sech}^2\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \quad (9.1)$$

$$\frac{dX}{d\eta} = u - \frac{\mu}{2} u X \operatorname{sech}^2\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \operatorname{th}\left(\frac{X}{(1-u^2)^{1/2}}\right) \quad (9.2)$$

Значения координаты X и скорости u рассчитывались методом Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка из системы (9). Кроме того, была рассчитана производная по времени от функции угла поворота блока – скорость поворотного деформирования:

$$\dot{\theta} = \frac{d\beta}{dt} = 20 \sqrt{\frac{\Omega \sqrt{G/\rho}}{R_0}} \frac{u}{\sqrt{1-u^2}} \operatorname{sech} h\left(\frac{X-u\eta}{\sqrt{1-u^2}}\right), \quad (10)$$

которая для описания деформационного процесса является физически более информативной величиной.

Таким образом, можно численно исследовать динамические параметры (координату X , скорость волны U и скорость поворотной деформации $\dot{\theta}$) односолитонного решения (8) уравнения СГ (6) со структурным возмущением, обусловленным трением на границах блоков α и неоднородностью их вращения μ . Для проведения расчетов нами была написана программа, реализующая метод Рунге-Кутты четвертого и пятого порядка [9].

Начальные условия $x_0 = 0, t_0 = 0, u_0 = 10^{-10}$ ($u = U/c_0$ – безразмерная скорость) в соответствии с [3] выбирались таким образом, чтобы скорость деформирования не превышала значения $\dot{\theta}_0 \leq 10^{-13} \text{ с}^{-1}$, что близко к средней скорости деформации в сейсмоактивных [8] и вулканических [7] областях и заметно отличается от глобальной средней скорости деформации (вращения отдельных блоков) в различных регионах Земли, оцениваемой величиной $5,5 \cdot 10^{-16} \text{ с}^{-1} \approx 1\text{-}2 \text{ град/млн. лет}$ [10]. Следует отметить, что значение скорости 10^{-13} с^{-1} по порядку величины близко теоретической модельной оценке величины угла $\beta_0 \approx 10^{-2} \text{ град.}$, на который в рамках ротационной модели поворачивается «элементарный» сейсмофокальный блок между двумя последовательными во времени сильнейшими землетрясениями с очагами в его пределах. В процессе вычислений были выбраны характерные для земной коры значения физических параметров $\rho = 3 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3, G = 5 \cdot 10^{10} \text{ Па}, R_0 \approx 10^5 \text{ м}, \Omega = 7,29 \cdot 10^{-5} \text{ с}^{-1}$.

Ниже представлены результаты расчетов для различных значений α и μ . Определим значения параметров решения при $\alpha = \mu = 0$ (рис. 1).

Как и ожидалось, при $\alpha = \mu = 0$ уравнение (6) сводится к невозмущенному уравнению (1), для которого солитон (2) движется равномерно, т.е. имеет постоянные значения U и $\dot{\theta}$.

Построим графики изменения параметров для $\alpha = 0.4-0.8$, соответствующих реальным разломам [12], с фиксированной величиной коэффициента неоднородности $\mu = 0.0005$ (рис. 2-4).

В этих пределах изменения α значение U_{max} меняется от $U_{max} \approx 1.6$ см/с до $U_{max} \approx 0.8$ см/с.

При фиксированном $\alpha = 0.6$ будем варьировать параметр μ в пределах $\mu = 0.0001-0.0005$ (рис. 5-7).

В диапазоне $\mu = 0.0001 - 0.0005$ значение U_{max} изменяется от $U_{max} \approx 0.2$ см/с до $U_{max} \approx 1.1$ см/с.

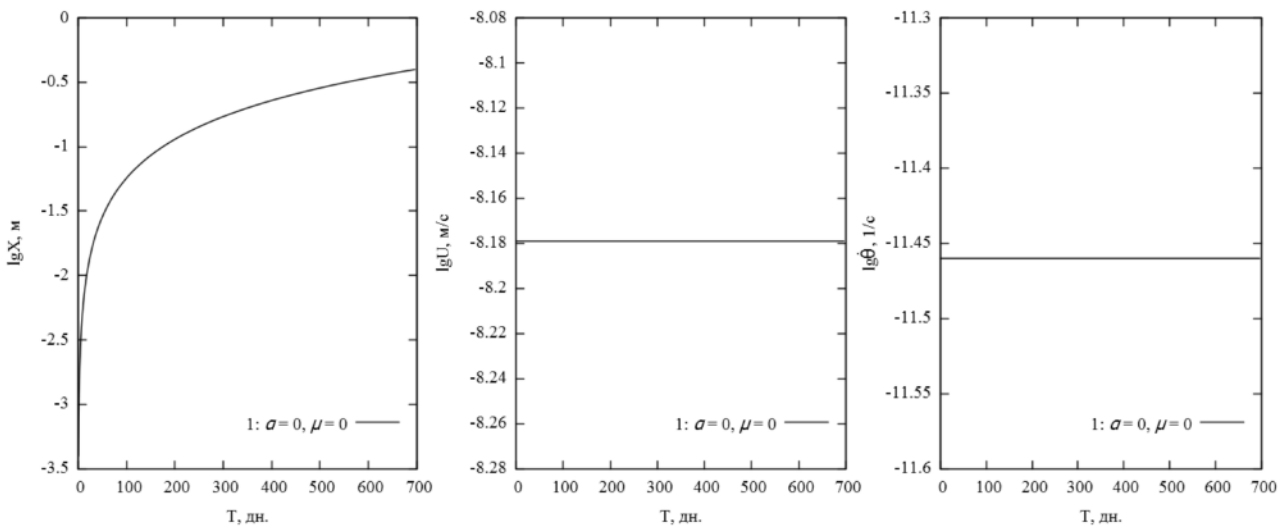


Рис 1. Параметры солитонного решения уравнения (6) при $\alpha = 0$ и $\mu = 0$.

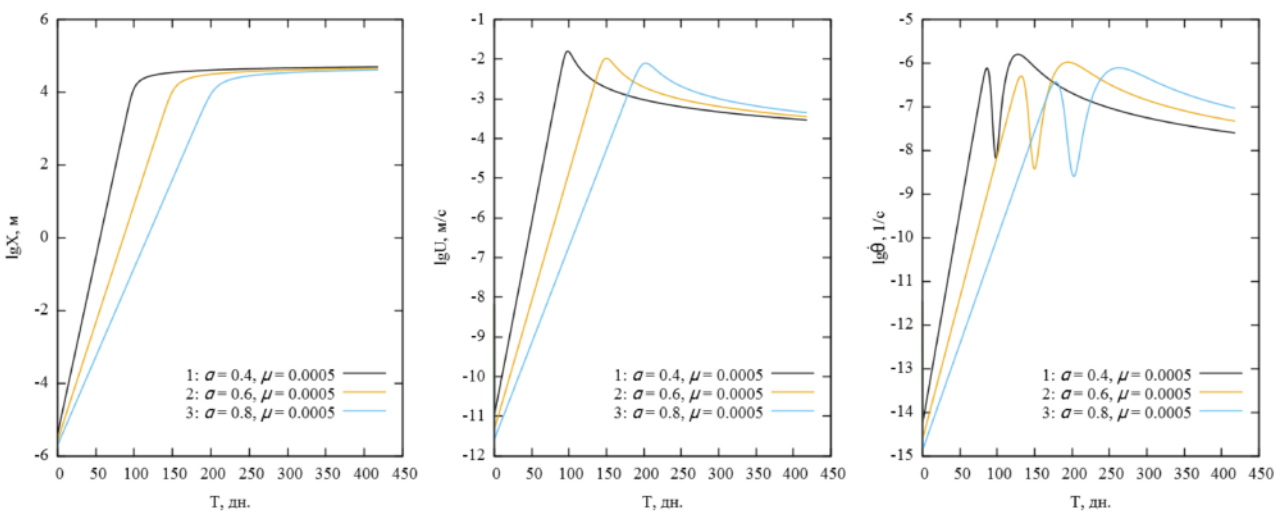


Рис. 2. Динамика изменения параметров X , U и $\dot{\theta}$ при $\alpha = 0.4, 0.6, 0.8$.

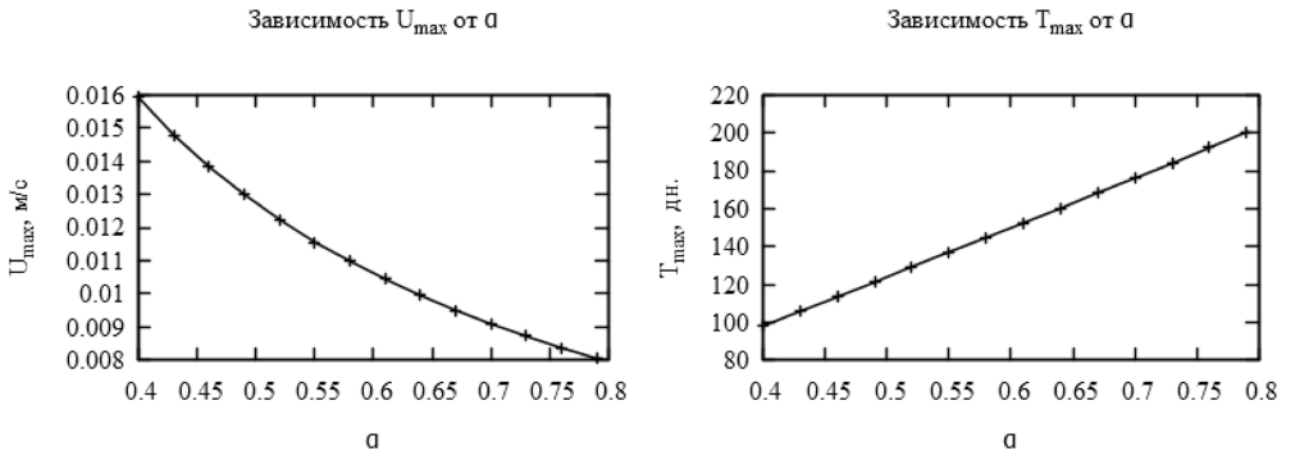


Рис. 3. Зависимость значений U_{max} и T_{max} от α .

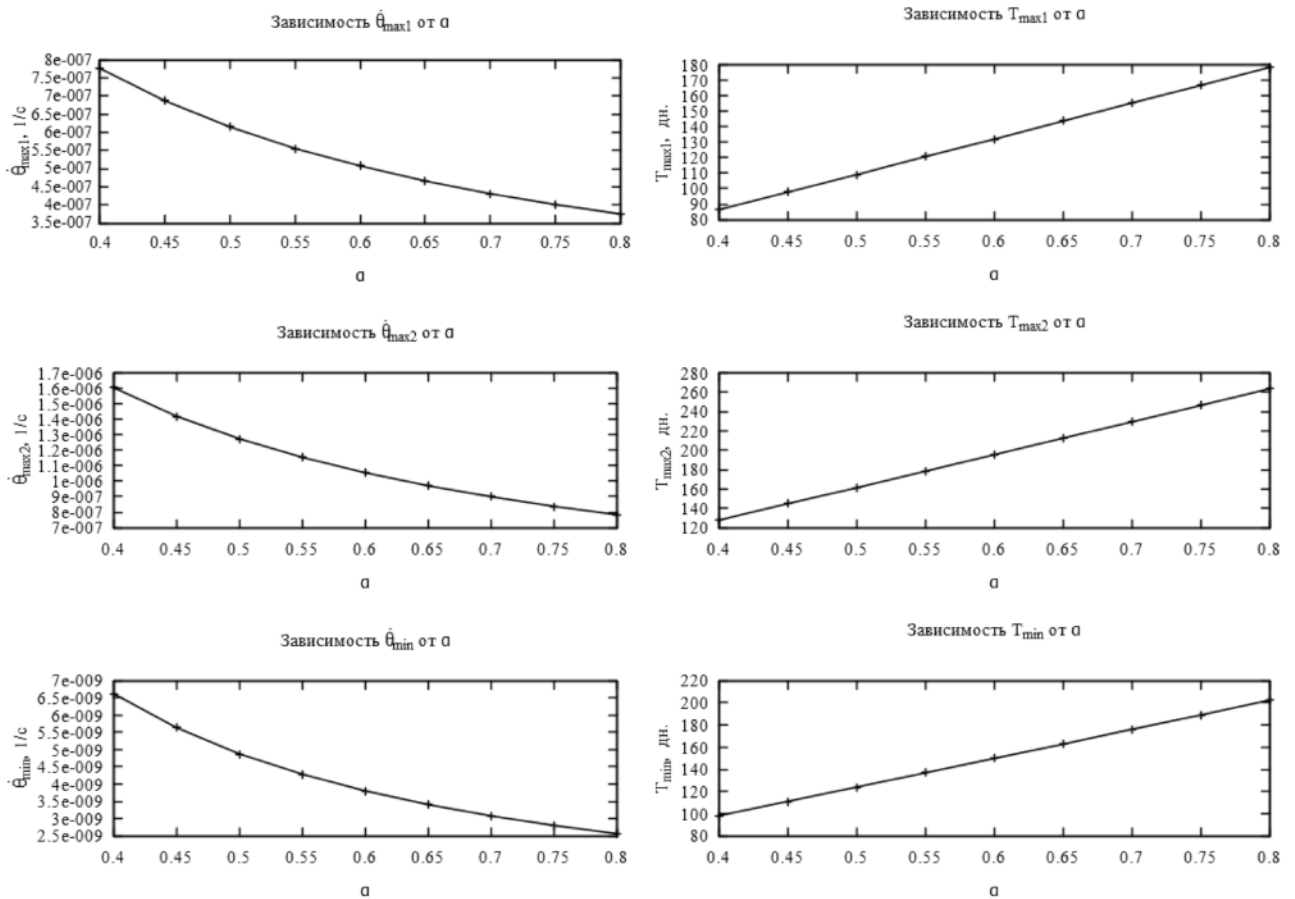


Рис. 4. Зависимости максимумов и минимума $\hat{\theta}$ и соответствующих им времен от α .

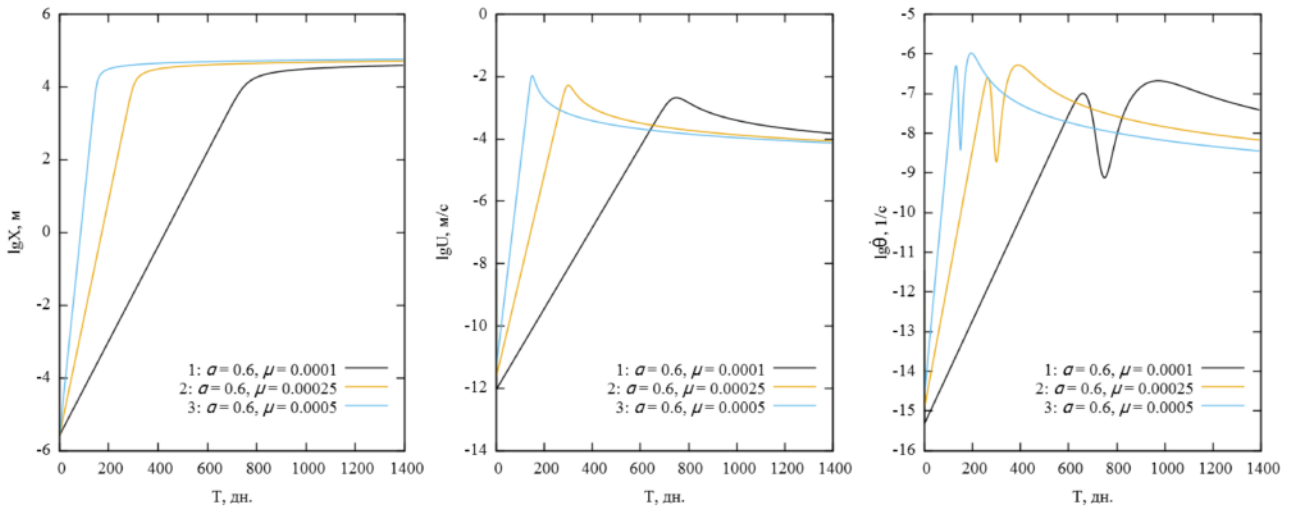


Рис. 5. Динамика изменения параметров X , U и $\dot{\theta}$ при $\mu = 0.0001, 0.00025, 0.0005$.

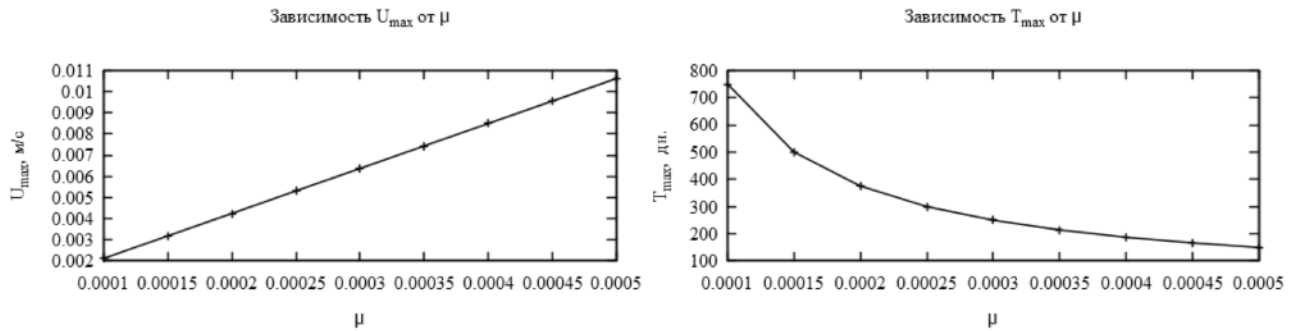


Рис. 6. Зависимость значений U_{max} и T_{max} от μ .

Анализ динамики изменения параметров солитонного решения возмущенного уравнения СГ при различных наборах параметров α и μ позволяет сформулировать следующие выводы:

1. При увеличении коэффициента трения α увеличиваются и времена, за которые волна достигает максимальной скорости U_{max} , максимумов и минимума $\dot{\theta}$. При этом сами значения U и $\dot{\theta}$ уменьшаются. Таким образом, при увеличении α процесс распространения солитона «замедляется» и «сглаживается».
2. При увеличении значения коэффициента неоднородности μ , наоборот, волна быстрее достигает своих максимума скорости U_{max} и min-max значений $\dot{\theta}$. При этом увеличиваются и их значения. Таким образом, моделируемый процесс идет быстрее и резче.
3. При одновременном увеличении или уменьшении значений α и μ меняется и временной масштаб процесса.
4. Асимптотическое значение X , т.е. X_{max} , при любых α и μ всегда соответствует равенству $X_{max} \approx R_0$ – радиусу блока.
5. Для любых α и μ волна достигает значений U_{max} , $\dot{\theta}_{min}$ и выхода X на асимптотику одновременно.

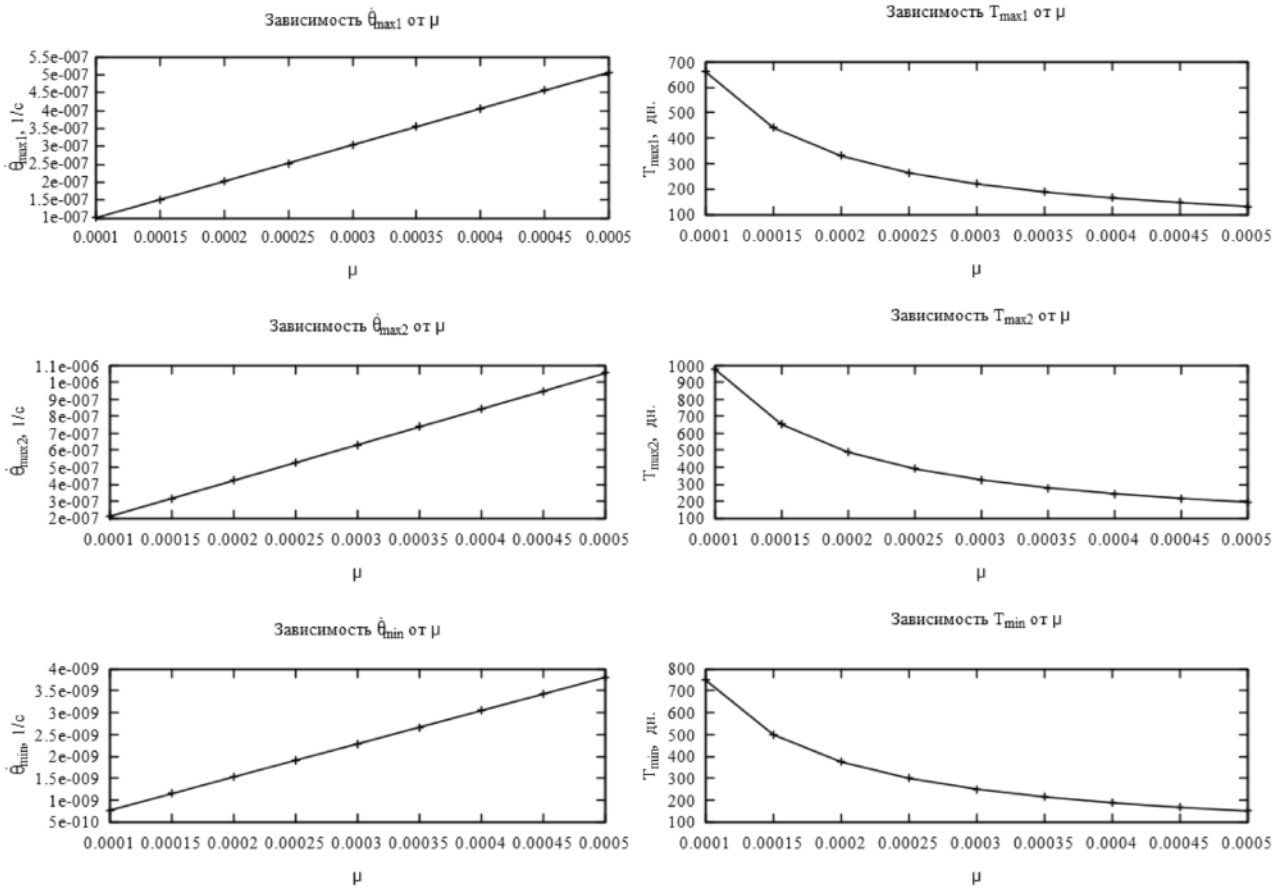


Рис. 7. Зависимости максимумов и минимума и соответствующих им времен от μ .

6. Наименьшие значения U_{max} и $\dot{\theta}_{min}$ достигаются при одновременном увеличении α и уменьшении μ , и наоборот.

Кроме одновременного достижения волной значений U_{max} , $\dot{\theta}_{min}$ и выхода X на асимптоту существуют еще и другие инвариантные величины, не зависящие от α и μ , но характерные для процесса в целом:

- 1) отношение максимумов скорости деформации $\dot{\theta}_{max2}/\dot{\theta}_{max1} \approx 2$;
- 2) отношение продолжительностей максимумов скорости деформации $\Delta T_{max2}/\Delta T_{max1} \approx 6$.

В работе [2] показано, что интервалы времени, в течение которых форшоки и афтершоки происходят относительно сильнейших толчков, соотносятся в пропорции $\Delta t_a/\Delta t_\phi = 69/11 = 6,3$, близкой к отношению продолжительностей максимумов скорости деформации. В то же время, при близости значений магнитуд наиболее сильных форшоков и афтершоков: $M_\phi \approx M_a$, их числа N_a и N_ϕ , а, следовательно, и суммарные сейсмические энергии E_a и E_ϕ , выделяемые в течение форшоковой и афтершоковой стадий, соотносятся между собою в

пропорции $N_a/N_\phi = E_a/E_\phi = 2,3$, близкой к отношению величин максимумов скоростей деформации.

Интерпретация графика скорости деформации $\dot{\theta}$ может быть следующей. Особенностью взаимодействия сейсмофокальных блоков, по сути, является перераспределение и высвобождение накопленных напряжений при землетрясении, которое происходит в результате локализации неустойчивой деформации в определенный момент времени (минимум на графике $\dot{\theta}$). В рамках такого подхода, первой и второй стадиям взаимодействия тектонической волны с сейсмофокальным блоком (первый и второй максимумы на кривой $\dot{\theta}$) могут соответствовать форшоковая и афтершоковая стадии сейсмического цикла.

Предельная скорость миграции глобальной сейсмической активности составляет $V_{1,max} = 1-10$ см/с, а энергетический характер миграционной зависимости соответствует солитонному типу возбуждения [5]. В нашей численной модели (6) солитонное решение также демонстрирует такие значения $U_{max} = 1-10$ см/с (которые мы можем расценивать как его предельную скорость c_0) на некоторых диапазонах значений параметров α и μ ; в частности, при соответствующих реальным разломам [12] $\alpha = 0.6$ и $\mu = 0.0005 - 0.0050$.

Таким образом, ротационная модель позволяет количественно описать такие важные свойства сейсмического процесса, как его форшоковую и афтершоковую стадии и заключенное между ними сильнейшее землетрясение. При этом результаты численного моделирования сейсмического процесса при помощи модифицированного уравнения СГ (6) согласуются с экспериментальными данными.

Список литературы

1. Викулин А.В. Сейсмичность. Вулканизм. Геодинамика: сб. тр. Петропавловск-Камчатский: КамГУ, 2011. 407 с.
2. Викулин А.В. Физика волнового сейсмического процесса. Петропавловск-Камчатский: Изд-во КГПУ, 2003. 151 с.
3. Викулин А.В., Быков В.Г., Лунева М.Н. Нелинейные волны деформации в ротационной модели сейсмического процесса // Вычисл. технологии. 2000. Т. 5. № 1. С. 31-39.
4. Викулин А.В., Иванчин А.Г. О современной концепции блочно-иерархического строения геосреды и некоторых ее следствиях в области наук о Земле // Физико-технические проблемы разработки полезных ископаемых (ФТПРПИ). 2013. № 3. С. 67-84.
5. Викулин А.В., Махмудов Х.Ф., Иванчин А.Г. и др. О волновых и реидных свойствах земной коры // Физика твердого тела, 2016. Том 58, №3. С. 547-557.
6. Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Х. Солитоны и нелинейные волновые уравнения. М.: Мир. 1988. 694 с.
7. Мелекесцев И.В. Вихревая вулканическая гипотеза и некоторые перспективы ее применения // Проблемы глубинного вулканизма. М.: Наука. 1979. С.125-155.
8. Родионов В.Н., Сизов И.А., Цветков В.М. Основы геомеханики. М.: Недра. 1986. 301 с.

9. *Форсайт Дж., Малькольм М., Моулер К.* Машинные методы математических вычислений. М.: Мир. 1980. 280 с.
10. *England P., Molnar P.* The field of crustal velocity in Asia calculated from Quaternary rates of slip on faults // *Geophys. J. Int.* 1997. 130. N 3. P. 551-582.
11. *McLaughlin D. W., Scott A. C.* Perturbation analysis of fluxon dynamics // *Phys. Rev. A.* 1978. 18. P. 1652-1680.
12. *Nur A., Ron H., Scotti O.* Fault mechanics and the kinematics of block rotation // *Geology.* 1986. 14. P. 746-749.