

УДК 550.348.

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ДИФфуЗИОННАЯ МОДЕЛЬ МАССОПЕРЕНОСА РАДОНА (^{222}Rn) В ГРУНТЕ И ЕГО ЭКСХАЛЯЦИИ В ПРИЗЕМНЫЙ СЛОЙ АТМОСФЕРЫ

© 2006 Р.И. Паровик¹, И. А. Ильин¹, П. П. Фирстов²

¹Камчатский государственный университет им. Витуса Беринга, Петропавловск-Камчатский, 683032,

²Институт вулканологии и сейсмологии ДВО РАН, Петропавловск - Камчатский, 683006

e-mail: romano_kgu@rambler.ru

Рассмотрена математическая модель диффузионной составляющей процесса массопереноса эманации (^{222}Rn) в рыхлых отложениях и в приземном слое атмосферы. С привлечением математического аппарата операционного исчисления найдены аналитические решения для такой модели. Полученные решения отвечают граничным условиям задачи.

ВВЕДЕНИЕ

Наиболее технологичным методом в геохимических исследованиях с целью прогноза землетрясений является регистрация радона в подпочвенной атмосфере. Метод основан на разработанной теории массопереноса радона и эманационном методе картирования с целью поиска месторождений радиоактивных руд, который начал развиваться в 30-е годы XX века. Начиная с 70-х годов XX века, радоновый метод стал активно использоваться во всех сейсмоактивных регионах мира с целью поиска предвестников землетрясений. После некоторого затишья с середины 80-х годов XX века наблюдается всплеск работ, связанных с изучением сейсмоэманационных эффектов геологических структур во многих регионах мира, в том числе и на Камчатке (Фирстов, Рудаков, 2003). В настоящее время общепринято считать, что в динамике подпочвенного радона находит отражение изменение напряженно — деформированного состояния геосреды на последней стадии подготовки очага землетрясения.

В то же время эксхалляция радона в приземный слой атмосферы приводит к его ионизации, которая изменяет проводимость приземного слоя и влияет на его электрические характеристики. Так, перед сильными землетрясениями Авачинского залива на Камчатке зарегистрированы отрицательные бухтообразные аномалии в динамике напряженности атмосферного электрического поля E_z , которые связываются с увели-

чением стока радона в атмосферу (Руленко и др. 1993, 1996).

В связи с этим в данной работе проведено исследование диффузионной модели массопереноса радона в рыхлых отложениях и его стока в приземный слой атмосферы с учетом краевых условий.

МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ПОДПОЧВЕННОГО РАДОНА В ГРУНТЕ И НА ПОВЕРХНОСТИ ЗЕМЛИ

Модель переноса подпочвенного радона описывается линейными дифференциальными уравнениями или системой дифференциальных уравнений в частных производных с начальными и граничными условиями (Новиков, 1989; Новиков, Капков, 1965). Целью построения таких моделей является получение представлений о закономерностях распределения концентрации Rn в зоне аэрации рыхлых отложений с различными физико-механическими параметрами. Классическая теория эманационного метода рассматривает массоперенос радона в рыхлых отложениях как некий установившийся диффузионно-конвективный процесс, который описывается следующим уравнением (Новиков, 1989):

$$D \frac{\partial^2 N_1(z,t)}{\partial z^2} + v\eta \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial z} - \lambda\eta N_1(z,t) - \eta \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial t} + Q = 0, \quad (1)$$

а уравнение массопереноса в атмосфере описывается уравнением следующего вида:

$$\frac{\partial}{\partial z} \left(A(z) \cdot \frac{N_2(z,t)}{\partial z} \right) - \lambda N_2(z,t) + \eta \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial t} = 0 \quad (2)$$

где N_1 – концентрация радона в единице объема порового пространства, Ку/см³; η – пористость горной породы; D – коэффициент диффузии, см²/с; λ – постоянная распада эманаций, с⁻¹; v – скорость

конвективного переноса, см/с; $Q = \frac{a \cdot Ra \cdot \rho \cdot \lambda}{\eta}$ ско-

рость выделения эманаций в поровое пространство в единице объема среды, Ку·с/см³; Ra – количество радия в породе, г; ρ – плотность породы, г/см³; a – коэффициент эманирования; $A(z)$ – коэффициент турбулентной диффузии, $N_1(z, t)$ и $N_2(z, t)$ плотности распределения радона в грунте и в атмосфере соответственно.

На первом этапе исследовался случай распределения радона в рыхлых отложениях бесконечной мощности в стационарных условиях с распределенными параметрами. В этом случае перенос подпочвенного радона происходит в условиях отложений с однородным кларковым содержанием радиоактивных элементов. Рассмотрим упрощенное решение задачи массопереноса радона в приземный слой атмосферы при следующих допущениях:

- конвективная составляющая отсутствует ($v=0$);

- коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере $A(z)$ не зависит от высоты;

- уравнение (2) стационарное.

При принятых допущениях мы будем иметь систему уравнений:

$$\begin{cases} D \frac{\partial^2 N_1(z,t)}{\partial z^2} - \lambda \eta N_1(z,t) - \eta \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial t} + Q = 0 \\ A \frac{\partial^2 N_2(z,t)}{\partial z^2} - \lambda N_2(z,t) = 0 \end{cases}, \quad (3)$$

со следующими краевыми условиями:

1. равенство потоков и плотностей радона на границе сред;

2. постоянная концентрация радона при достижении равновесия с продуктами распада на определенной глубине рыхлых отложений;

3. концентрация радона в начальный момент времени постоянна.

$$\begin{aligned} 1. \quad z=0 \quad N_1(z,t) &= N_2(z,t), \eta D \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial z} = A \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial z} \\ 2. \quad z \rightarrow +\infty \quad N_1(z,t) &= N_\infty, \quad z \rightarrow -\infty \quad N_2(z,t) = 0 \\ 3. \quad t=0 \quad N &= N_\infty \end{aligned}, \quad (4)$$

Воспользуемся методом операционного исчисления (Диткин, Прудников, 1961) и проведем интегральное преобразование Лапласа. Для этого каждый член в системе уравнений (3) умножим на e^{-pt} , где p – комплексная переменная, и выполним интегрирование от 0 до ∞ . Тогда получим:

$$\begin{cases} D \int_0^\infty \frac{\partial^2 N_1(z,t)}{\partial z^2} e^{-pt} dt - \lambda \eta \int_0^\infty N_1(z,t) e^{-pt} dt - \eta \int_0^\infty \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial t} e^{-pt} dt + Q \int_0^\infty e^{-pt} dt = 0 \\ A \int_0^\infty \frac{\partial^2 N_2(z,t)}{\partial z^2} e^{-pt} dt - \lambda \int_0^\infty N_2(z,t) e^{-pt} dt = 0 \end{cases} \quad (5)$$

Граничные условия примут вид:

$$\begin{aligned} 1. \quad z=0 \quad \int_0^\infty N_1(z,t) e^{-pt} dt &= \int_0^\infty N_2(z,t) e^{-pt} dt, \eta D \int_0^\infty \frac{\partial N_1(z,t)}{\partial z} e^{-pt} dt = A \int_0^\infty \frac{\partial N_2(z,t)}{\partial z} e^{-pt} dt \\ 2. \quad z \rightarrow -\infty \quad \int_0^\infty N_1(z,t) e^{-pt} dt &= N_\infty \int_0^\infty e^{-pt} dt = \frac{N_\infty}{p}, \quad z \rightarrow +\infty \quad \int_0^\infty N_2(z,t) e^{-pt} dt = 0 \\ 3. \quad t=0 \quad N_1(z,0) &= N_\infty \end{aligned}$$

Введем функции изображения

$$F_1(z, p) = \int_0^\infty N_1(z, t) e^{-pt} dt \quad \text{и}$$

$$F_2(z, p) = \int_0^\infty N_2(z, t) e^{-pt} dt.$$

Тогда система (5) запишется в виде:

$$\begin{cases} D \frac{d^2 F_1(z, p)}{dz^2} - \eta(\lambda + p) F_1(z, p) + \eta N_\infty \frac{(\lambda + p)}{p} = 0 \\ A \frac{d^2 F_2(z, p)}{dz^2} - \lambda F_2(z, p) = 0 \end{cases}, \quad (6)$$

а граничные условия:

$$\begin{aligned} 1. \quad z=0 \quad F_1(z, p) &= F_2(z, p), \eta D \frac{dF_1(z, p)}{dz} = A \frac{dF_2(z, p)}{dz} \\ 2. \quad z \rightarrow -\infty \quad F_1(z, p) &= \frac{N_\infty}{p}, \quad z \rightarrow +\infty \quad F_2(z, p) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Каждое уравнение системы (6) является обыкновенным линейным дифференциальным уравнением второго порядка, решения для которого могут быть легко получены (Камке, 2003).

Первое уравнение системы (6) имеет решение:

$$F_1(z, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} z} + \frac{N_\infty}{p},$$

где $D^* = \frac{D}{\eta}$ – кажущийся коэффициент диффузии.

Второе уравнение системы (6) имеет решение:

$$F_2(z, p) = C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{A}} z} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{A}} z}.$$

Тогда система (6) будет иметь вид:

$$\begin{cases} F_1(z, p) = C_1 e^{\sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} z} + C_2 e^{-\sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} z} + \frac{N_\infty}{p} = 0 \\ F_2(z, p) = C_3 e^{\sqrt{\frac{\lambda}{A}} z} + C_4 e^{-\sqrt{\frac{\lambda}{A}} z} = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Учитывая граничные условия (5), найдем константы C_1, C_2, C_3, C_4

$$\begin{cases} C_1 + C_2 + \frac{N_\infty}{p} = C_3 + C_4 \\ \eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} C_1 - \eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} C_2 = A \sqrt{\frac{\lambda}{A}} C_3 - A \sqrt{\frac{\lambda}{A}} C_4 \end{cases}, (9)$$

И учитывая условия на бесконечности, получим, что константы $C_1 = C_4 = 0$

$$\begin{cases} C_2 + \frac{N_\infty}{p} = C_3 \\ -\eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} C_2 = \sqrt{A \cdot \lambda} C_3 \end{cases}, (10)$$

в итоге

$$C_2 = -\frac{N_\infty \sqrt{A\lambda}}{p \left(\eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} + \sqrt{A\lambda} \right)} \text{ и}$$

$$C_3 = \frac{N_\infty}{p} - \frac{N_\infty \sqrt{A\lambda}}{p \left(\eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} + \sqrt{A\lambda} \right)}.$$

Подставляя найденные константы в систему (8), получим, что изображения будут иметь вид:

$$F_1(z, p) = \frac{N_\infty}{p} - \frac{N_\infty \sqrt{A\lambda}}{p \left(\eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} + \sqrt{A\lambda} \right)} e^{-\sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} z}$$

$$F_2(z, p) = \left(\frac{N_\infty}{p} - \frac{N_\infty \sqrt{A\lambda}}{p \left(\eta D \sqrt{\frac{\lambda+p}{D^*}} + \sqrt{A\lambda} \right)} \right) e^{\sqrt{\frac{\lambda}{A}} z} \quad (11)$$

Теперь осталось перейти к оригиналам $N_1(z, t), N_2(z, t)$.

По справочнику операционного исчисления (Диткин, Прудников, 1965) находим:

$$N(z, t) = N_\infty \left[1 - b \left(\frac{e^{-\sqrt{\tau} \lambda}}{2(b+\sqrt{\lambda})} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t}} \sqrt{\lambda} t \right) + \frac{e^{\sqrt{\tau} \lambda}}{2(b-\sqrt{\lambda})} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t}} + \sqrt{\lambda} t \right) \right) - \frac{b e^{b\sqrt{\tau} + b^2 t - \lambda t}}{b^2 - \lambda} \operatorname{erfc} \left(\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\tau}{t}} + b\sqrt{t} \right) \right]$$

$$N_2(z, t) = N_\infty e^{\sqrt{\frac{\lambda}{A}} z} \left[1 - b \left(\frac{b - \sqrt{\lambda} \cdot \operatorname{erfc}(\lambda \cdot t) - b e^{b^2 t - \lambda t} \cdot \operatorname{erfc}(b \cdot \sqrt{t})}{b^2 - \lambda} \right) \right], \quad (12)$$

где: $b = \frac{\sqrt{AD^* \lambda}}{\eta D}, \tau = \frac{z^2}{D^*},$

$\operatorname{erfc}(y) = 1 - \operatorname{erf}(y), \operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y e^{-z^2} dz$ – интеграл ве-

роятностей табулирован по справочнику (Корн, Корн, 1974).

ГРАФИЧЕСКОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ ЭМАНАЦИЙ В ГРУНТЕ И В ПРИЗЕМНОМ СЛОЕ АТМОСФЕРЫ

Построение графиков по результатам математического моделирования (уравнение (12)) производилось с помощью прикладного пакета программ Maple 9. При этом принимались: коэффициент пористости $\eta = 0.25$; постоянная распада $\lambda = 2.1 \cdot 10^{-6} \text{с}^{-1}$; три значения коэффициента диффузии в рыхлых отложениях (5.0, 10.0, 15.0) $\cdot 10^{-3} \text{см}^2/\text{с}$; коэффициент турбулентной диффузии в атмосфере $A = 10^3 \text{см}^2/\text{с}$ (Исаков, Исакова, 2002). Значение $N_\infty = 10 \text{кБк}/\text{м}^3$ принято согласно наблюдениям в районе Паратунского грабена на Камчатке (Фирстов, Рудаков, 2003). Строилось семейство кривых распределения $N(z)$ относительно N_∞ (рис. 1а). На рис. 1б видно, что кривые распределения относительной концентрации радона в рыхлых отложениях и в приземном слое атмосферы на границе раздела совпадают, что обусловлено граничными условиями в начальной постановке задачи. В первом приближении эксхалация радона в атмосферу составляет 0.03-0.06 от N_∞ (0.3 – 0.6 $\text{кБк}/\text{м}^3$) и быстро уменьшается с высотой в приземном слое атмосферы за счет турбулентности атмосферы. Следует отметить, что данные цифры несколько завышены за счет принятых для расчета высоких значений коэффициентов диффузии для рыхлых отложений.

Под действием ионизации воздуха за счет эксхалации радона вблизи поверхности земли возникает электродный эффект – процесс, происходящий вблизи электрода, помещенного в ионизированную среду. Электродный эффект в свою очередь влияет на электрические характеристики атмосферы вблизи поверхности земли. Эти вопросы достаточно подробно исследованы в работе (Куповых, Морозов, Шварц, 1998). Как показывают проведенные работы, даже без учета конвективной составляющей, в случае резкого увеличения стока радона в атмосферу, можно ожидать существенных изменений электрических характеристик атмосферы, что, по-видимому,

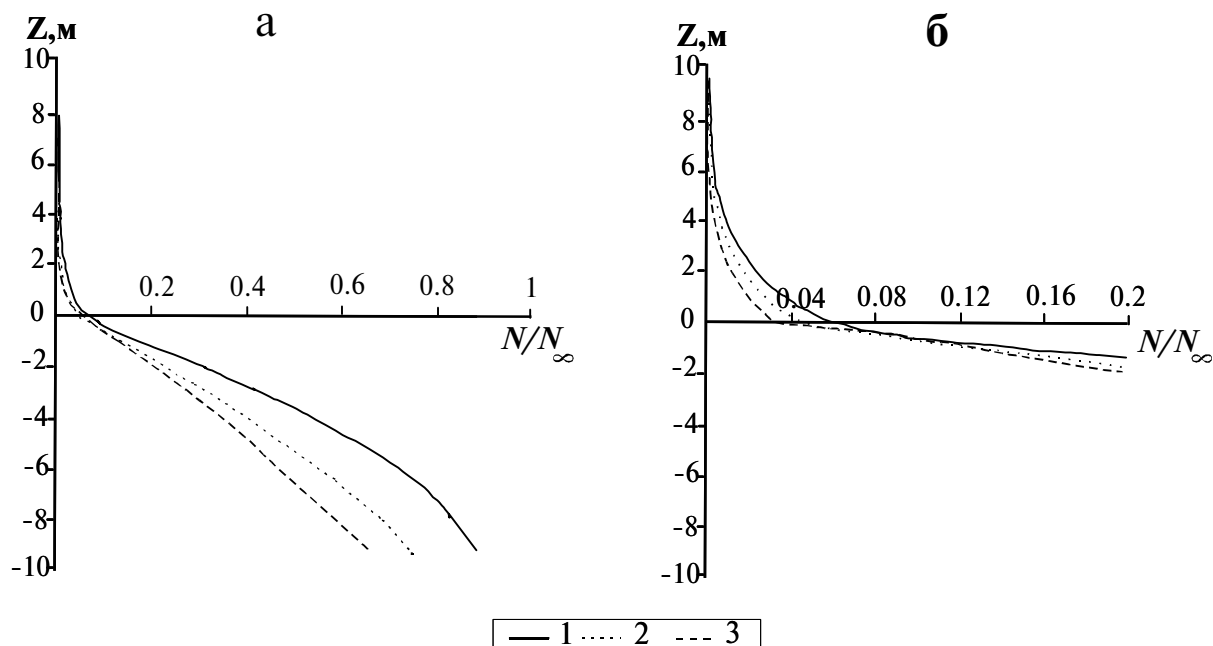


Рис. 1. Кривые распределения по глубине рыхлых отложений и высоте приземного слоя атмосферы относительной концентрации ^{222}Rn для значений D^* : 1 - $5 \cdot 10^{-3}$; 2 - 10^{-2} ; 3 - $1.5 \cdot 10^{-2}$ $\text{см}^2/\text{с}$ (а). Те же кривые построенные более детально для приземного слоя атмосферы (б).

имело место перед сильными землетрясениями района Авачинского залива (Руленко и др., 1992, 1996).

ВЫВОДЫ

Построена математическая модель диффузионной составляющей процесса массопереноса эманации (^{222}Rn) в рыхлых отложениях и в приземном слое атмосферы. С привлечением математического аппарата операционного исчисления найдены аналитические решения для этой модели. Полученные решения отвечают граничным условиям задачи.

Данная модель является весьма упрощенной и одномерной. Модель не учитывает конвективную составляющую v в уравнениях (1) и (2), зависимость коэффициента турбулентной диффузии в приземном слое атмосферы $A(z)$ от высоты, но она дает в первом приближении оценку величины эксхалляции радона в атмосферу. Так как рассмотрение моделей с учетом влияния метеорологических параметров на массоперенос радона в зоне аэрации и приземном слое атмосферы представляет большой интерес для целей поиска предвестниковых аномалий сильных землетрясений, то в дальнейшем планируется попытка рассмотреть многомерной модели с учетом геолого - тектонического строения конкретных блоков земной коры и реальной турбулентности в приземном слое атмосферы и

сравнения модельных результатов с экспериментальными данными.

Список литературы

- Диткин В.А., Прудников А.П. Интегральные преобразования и операционное исчисление. М.: Физ.-мат. лит., 1961. 524 с.
- Диткин В.А., Прудников А.П. Справочник по операционному исчислению. М.: Высшая школа, 1965. 455 с.
- Исаков А.Я., Исакова В.В. Физические величины. Справочник. П-К.: Новая книга, 2002. 137 с.
- Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. С-Пб.: Лань, 2003. 576 с.
- Корн Т., Корн Г. Справочник по математики для научных работников и инженеров. М.: Наука, 1974. 832 с.
- Куповых Г.В., Морозов В.Н., Шварц Я.М. Теория электродного эффекта в атмосфере. Таганрог: изд-во ТРГУ, 1998. 122 с.
- Новиков Г.Ф. Радиометрическая разведка. Л.: Недра, 1989. 407 с.
- Новиков Г.Ф., Капков Ю. Н. Радиоактивные методы разведки. Л.: Недра, 1965. 759 с.
- Руленко О.П., Дружин Г.И., Вершинин Е.Ф. Измерения атмосферного электрического поля и естественного электромагнитного излучения перед Камчатским землетрясением 13.11.93 г., $M=7.0$ // Докл. РАН. 1996. Т. 348. № 6. С. 814-816.

Руленко О.П., Иванов А.В., Шумейко А.В.
Краткосрочный атмосферно электрический
предвестник Камчатского землетрясения
6.03. 1992, M=6.1 // Докл. РАН. 1992. Т. 326. № 6.
С. 980-982.

Фирстов П. П., Рудаков В.П. Результаты ре-
гистрации подпочвенного радона в 1997-2000 гг.
на Петропавловск-Камчатском геодинамическом
полигоне // Вулканология и сейсмология. 2003.
№ 1. С. 26-41.

**MATHEMATICAL DIFFUSION MODEL FOR MASS TRANSFER OF RADON (^{222}Rn)
IN GROUND AND IT EXHALATION IN THE SURFACE LAYER
OF THE ATMOSPHERE IN 2006**

R.I. Parovik¹, I.A. Ijin¹, P.P. Firstov²

¹Kamchatka State University by Vitus Bering, Petropavlovsk-Kamchasky, 683032, Russia

*²Institute of volcanology and seismology, Far East Division, Russian Academy of Sciences
Petropavlovsk-Kamchatsky, 683006, Russia; e-mail: romano_kgu@rambler.ru*

This paper presents a simulated model of diffusion for mass transfer of ^{222}Rn - emanation in alluvium deposits and in the surface layer of the atmosphere. Analytical solutions for this model were found by means of operational calculation. Obtained results meet the boundary conditions of an experiment.